# THREE THEOREMS ON JACOBI FORMS OF GENERAL DEGREE (Modular forms and automorphic representations)



伊吹山, 知義

数理解析研究所講究録
第 1973 巻 2015 年 18-33



# THREE THEOREMS ON JACOBI FORMS OF GENERAL DEGREE

伊吹山知義 (TOMOYOSHI IBUKIYAMA)
大阪大学名誉教授 (OSAKA UNIVERSITY)

講演では次の3つについて、述べた。
(1) 行列 $M$ を index に持つ、ウェイト $k$ の一般次数のヤコービ形式のテーラー展開係数は本質的にはベクトル値のジーゲル保型形式であること。
(2) これを応用すると、ヤコービ形式の構造定理が得られる場合があること。従来の結果に加えて、次数 2, レベル 2 のヤコービ形式加群の構造を決めた点が新しい結果である。
(3) 上記と直接関連はないが、index が 1 の $\Gamma_0(N)$ の一般次数のベクトル値ヤコービ形式（ウェイトは $\det^k\rho_0$ で指標付き、または指標無し）が、ベクトル値半整数ウェイトの $\Gamma_0(4N)$ のジーゲル保型形式の空間 (ウェイトは $\det^{k-1/2}\rho_0$ で指標付き、または指標無し）のプラス部分空間と同型であること。

実際の講演では、時間の制約もあって、主として (1) について、ヤコービ形式という観点から述べたが、ここでは、講演とは少し変えて、微分作用素という観点を中心にして (1) について述べてみたい。なお、詳しい話はいずれ論文に書く予定であり、きちんとした証明は当然そこに述べることになる。同じことを書くのは無駄であると思うので、ここでは、もっと非公式な感じの周辺的な解説を試みたい。(2), (3) は本来論文としては別のものであるので、軽く触れる程度にしたい。

## 1. 微分作用素の一般的な設定

領域の制限に対して保型性を保つような微分作用素について、(すでに何度か述べたことがあるが) 、一つの定式化を復習しておく。包含関係のある2つの有界対称領域 $\Delta\subset D$ があって、$\Delta$ の正則自己同型群 $Aut(\Delta)$ の部分群 $H$ が $Aut(D)$ に、作用が自然に拡張されるように埋め込まれているとする。$V$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。$GL(V)$ に値を持つ、$\Delta$ の保型因子 $J_\Delta(h,z)$ ($h\in H$, $z\in\Delta$) と $GL(1)$ に値を持つ $D$ の保型因子 $J_D(g,Z)$ ($g\in G\subset Aut(D)$, $Z\in D$) が有るとする。(ここで、$D$ の側を $GL(1)$ とスカラー値にしたのは、とりあえずの技術的な理由であり、定式化だけの観点から言えば、もっと一般でも良い。) さて、一般に領域 $D_0$ 上のベクトル空間 $V_0$ に値をもつ正則関数の空間を $Hol(D_0,V_0)$ と書くことにする。$F\in Hol(D_0,V_0)$ と

本研究は日本学術振興会科学研究費基盤研究 (A)25247001 によって援助されています.

$D_0$ 上の $GL(V_0)$ 値保型因子 $J_{D_0}$ と $g \in Aut(D_0)$ に対して、

$$F|_{J_{D_0}}[g] = J_{D_0}(g,Z)^{-1}F(gZ)$$

とかく。また、$Res : Hol(D,V) \to Hol(\Delta,V)$ で、$\Delta \to D$ なる埋め込みの引き戻しによる関数の部分領域への制限を表すとする。このとき、$Hol(D,\mathbb{C})$ に作用する。定数係数線形偏微分作用素 $\mathbb{D}$ で、次の可換図式が成立するものを考えたい。

**$\mathbb{D}$ の条件**: 任意の $g \in H \subset Aut(\Delta) \to Aut(D)$ について、

$$\begin{array}{ccccc}
Hol(D,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathbb{D}} & Hol(D,V) & \xrightarrow{Res.} & Hol(\Delta,V) \\
{\scriptstyle |_{J_D}[g]}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle |_{J_\Delta}[g]} \\
Hol(D,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathbb{D}} & Hol(D,V) & \xrightarrow{Res.} & Hol(\Delta,V)
\end{array}$$

この条件の意味は、$F \in Hol(D,\mathbb{C})$ が離散群 $\Gamma \subset Aut(D)$ に関するウェイト $J_D$ の保型形式ならば、$Res(\mathbb{D}F) \in Hol(\Delta,V)$ は $\Gamma \cap H$ に関するウェイト $J_\Delta$ の保型形式であることを示している。

このような $\mathbb{D}$ がどの程度存在するかは、もちろん領域の取り方以外に $J_D$ と $J_\Delta$ にもよっている。(存在しない場合もある。)

ちなみに、上の可換図式の、真ん中の部分でも上から下への写像を考えることができる。ここも入れて可換になるものはあるか、という問いを発することも可能で有り、たとえば Boecherer は特殊な場合にそのような微分作用素を構成している。(これはもはや定数係数ではない。) 一見そうする方が高級に見えるし、それなりの利点がある場合もある。しかし不思議なことに、実はむしろ「真ん中の部分の写像は考えない」という立場の方が理論の適用範囲(取り得る領域の種類)が増えて、豊かにもなり、全体の見通しも良くなる点がある。ここで扱うのは $D$, $\Delta$ がジーゲル上半空間ないしはその直積の場合で、微分作用素には、いろいろな種類の応用がある。ここでは特にヤコービ形式のテーラー展開に応用する。

## 2. 基本的な場合 ([7], [8])

しばらく微分作用素をはなれて、話を考える。以下、$H_n$ を $n$ 次のジーゲル上半空間とする。今 $F$ を $H_n$ 上のスカラー値正則関数とする。$H_n$ の元 $Z$ の成分を $Z = (z_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ と書くことにする。$F$ は正則であるから、すべての非対角成分 $z_{ij}$ $(i \neq j)$ について $z_{ij} = 0$ の近傍で、テーラー展開される。これを記述するために少し記号を用意する。

$$\mathcal{N}_0 = \{\nu = (\nu_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}_{\ge 0}); \nu_{ij} = \nu_{ji}, \nu_{ii} = 0\}$$

とおき、これを index と呼ぶことにする。$Z = (z_{ij}) \in H_n$ と $\nu \in \mathcal{N}_0$ に対して、

$$Z^\nu = \prod_{1 \le i \le j \le q} z_{ij}^{\nu_{ij}}$$

とかく。ここで $\nu_{ii}=0$ と仮定したので、$Z^\nu$ には対角成分は現れない。非対角成分に関するテーラー展開は、当然

$$F(Z)=\sum_{\nu\in\mathcal{N}_0} F_\nu(z_{11},z_{22},\ldots,z_{nn})Z^\nu$$

の形にかけている。ここで、もし $F$ がウェイト $k$ のジーゲル保型形式ならば、テーラー展開に関する定数項 $F_0(z_{11},z_{22},\ldots,z_{nn})$ は変数 $z_{ii}\in H_1$ のそれぞれについて、やはりウェイト $k$ の保型形式になることは、定義を考えれば、直ちに明らかになる。ではもっと次数の高いところの係数はどうなるであろうか。

ここで、微分作用素に戻る。まず前の節の設定で $\Delta=H_1\times\cdots\times H_1$ ($n$ 個の直積) を $H_n$ の対角成分にそのまま埋め込んだ場合を考える。この場合は、我々の微分作用素について、ほぼ完全と言っても良い理論が知られている。([7], [8]). この場合、$H_n$ の保型因子としては、ウェイト $k$ の普通の保型因子、つまり

$$J_D(g,Z)=\det(CZ+D)^k,\qquad g=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(n,\mathbb{R})$$

を考える。また制限の行き先は、$H_1^n$ 上の関数であり、群は $SL_2(\mathbb{R})^n\to Sp(n,\mathbb{R})$ の自然な埋め込みを考える。行き先のウェイトは $i$ 番目の対角成分について $k+a_i$ $(i=1,\ldots,n)$ としておく。ここで $a_i\geq 0$ が必要であるが、そのような任意の組 $(a_1,\ldots,a_n)$ について必ず微分作用素 $\mathbb{D}$ が有るわけではない。しかし、どのような場合にどれくらいあるかは、$d\geq n$ という条件下では実は正確にわかっている。

それはともかく、このような微分作用素 $\mathbb{D}$ を $F$ に作用させて、その後で対角成分 $\Delta$ に制限すると言うことは、微分した後に $z_{ij}=0$ $(i\neq j)$ としているわけであるから、結局、有限個のテーラー展開係数 $F_\nu(z_{11},\ldots,z_{nn})$ の適当な導関数の線形結合が、$Res(\mathbb{D}F)$ になるわけである。逆に言うと、我々の微分作用素というのは、$F$ がジーゲル保型形式の時、$F_\nu$ または $F_\nu$ の（一般には高階の）導関数の線形結合で、各 $z_{ii}$ について、ウェイトが $k+a_i$ になるのは、どのようなものか、を述べたものとも言える。以上でウェイトを増やす数値 $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ を多重次数ということにする。別に $F$ がジーゲル保型形式でなくても、微分作用素は作用と制限に関して、可換であるから、$g\in SL_2(\mathbb{R})^n$ について、$F|_k[g]$ の $\Delta$ への制限が、$F_\nu$ の導関数の線形結合への $g$ の（適当なウェイトの組による）作用と同じになっている。一方で、逆に $F$ からいろいろな微分 $\mathbb{D}$ でいろいろなウェイトに対応する $\Delta$ 上の関数を作ったとする。テーラー展開という観点からは、次のことが問題になる。

問題 : これらの像から、$F$ を再構成できるか？言い換えると、テーラー係数 $F_\nu$ は、$\{Res(\mathbb{D}F);\mathbb{D}$ は上のような微分$\}$ で得られる関数を用いて何らかの方法で表示できるのか？

答はイエスである。しかし、イエスという答は、「与えられたウェイトに対して、微分作用素が存在する」というような抽象的な存在定理からは得られない。もう少し深い結果が必要になる。後の説明のために、これを説明する。

まず、微分作用素はどのように書けるのかを少し復習する。われわれは定数係数の線形作用素を扱っているので、$Z$ の各変数 $z_{ij}$ に関する偏微分 $\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$ の多項式であると言って良い。記号を

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)$$

と定める。また $T=(t_{ij})$ を $n$ 次対称行列で各成分は変数であるものとする。$T$ の成分の多項式 $P(T)$ に対して、

$$\mathbb{D} = P\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)$$

と書くことができる。$\mathbb{D}$ の行き先のウェイト（保型因子）の条件から、$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, （$U$ は対角行列）の作用を考えることにより、$P$ はある種の斉次多項式であることが容易にわかる。ここで次数の意味は $t_{ii}$ は $i$ について 2 次、$t_{ij}$ $(i \neq j)$ は、$i$, $j$ についてそれぞれ 1 次と考える。そこで、多重次数 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ の $P$ というのは、上記の意味で各 $i$ について $a_i$ 次の単項式の線形結合で得られる多項式のこととする。$\mathbb{D}$ に関する条件は、多項式 $P$ に関する条件で書けるはずである。$d \geq n$ としておくと、この条件は単純で、$X$ を $n \times 2k$ の変数行列とし、$\widetilde{P}(X) = P(X\,{}^tX)$ とおくとき、$\widetilde{P}$ が次の条件を満たすことで記述される。

(1) $X$ の各行ベクトルに関する多項式とみなしたとき、各行それぞれについて調和多項式になる。

(2) $X$ の各行ベクトルに関する多項式としての次数が $a_i$ 次である。

(3) $\widetilde{P}$ に対して $\widetilde{P}(X) = P(X\,{}^tX)$ となる $P$ が存在するためには $\widetilde{P}(Xh) = \widetilde{P}(X)$ がすべての $h \in O(d,\mathbb{R})$ に成り立つという条件と同値である。（古典的な不変式論。）

このような条件を満たす多項式 $P$ のなす（有限次元）ベクトル空間を $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(2k)$ と書くことにする。さて、どのような $a_i$ の組について、このような $P$ がいくつ存在するか（あるいは存在しないのか）は、次のようにして記述される。

$\mathbf{a}$ で決まる保型因子に対応する $\mathbb{D}$ の次元は、すなわち $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(2k)$ の次元であるが、これは集合

$$\mathcal{N}_0(\mathbf{a}) = \{\nu = (\nu_{ij}) \in \mathcal{N}_0; \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} = a_i\}$$

の個数で与えられる ($\nu_{ii} = 0$ に注意。) もっと具体的には、各 $\nu \in \mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ に対して、次のような多項式 $P_\nu(T) \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}}(2k)$ が一意的に存在する。

$$P_\nu(T) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij}^{\nu_{ij}} + Q(T)$$

で、$Q(T)$ は $t_{11} = t_{22} = \cdots = t_{nn} = 0$ とするときゼロになる多項式。このような多項式は実は $\mathcal{P}_a(2k)$ の $\mathbb{C}$ 上の基底をなす。ここで $P_\nu$ は非

対角成分だけからなる単項式をただ一つだけ含んでいるので、このような基底を Monomial basis ということにして、$P_\nu^M(T)$ と書く。$P_\nu^M(T)$ に含まれる単項式は、$n$ 次整数対称行列 $\mu = (\mu_{ij})$ で $\mu_{ii} \in 2\mathbb{Z}$, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ なるものを用いて、

$$Z^\mu := \prod_{1 \le i,j \le n} t_{ij}^{\mu_{ij}/2}$$

と書ける。ただし $\mu_{ii}$ は偶数としているので、$t_{ii}^{\mu_{ii}/2}$ の指数は整数で有り、また、$t_{ij} = t_{ji}$ より、$i \neq j$ のときも、$t_{ij}^{\mu_{ij}/2} t_{ji}^{\mu_{ji}/2} = t_{ij}^{\mu_{ij}}$ であって、指数は整数である。上のように書く理由は、この方が次数などにうまく整合して、いろいろ綺麗に見えるからというだけの理由である。さて、このように単項式を書くとき、$P_\nu^M(T)$ の斉次性より、$\sum_{j=1,i}^n \mu_{ij} = a_i$ であるが、Monomial basis の定義により、どの単項式についても、$\mu \neq \nu$ である限り、ある $i$ については、$\mu_{ii} \neq 0$ となるので $\sum_{j=1,j\neq i}^n \mu_{ij} < a_i$ となる。この $\mu$ に対する単項式に偏微分を代入して得られる $F$ への作用では、次数が $\mathbf{a}$ より「小さい」テーラー展開係数 (つまり $z_{ii}$ の次数が $a_i$ 以下で、どこかでは $a_i$ より本当に小さいところ) の微分の定数倍が現れる。これを用いれば、

$$Res\left(P_\nu^M\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)F\right) \qquad \nu \in \mathcal{N}_0$$

の全体から、テーラー展開係数が復活できるのは明らかである。まず定数項 $F_0$ は $P_0^M = 1$ として明らか。以下 $\mathbf{a}$ に関する帰納法で示される。実際 $\mathbf{b} = (b_i)$ を多重次数で、すべての $i$ について $b_i \le a_i$ であり、どれかの $l$ について $b_l < a_l$ だったとする。簡単のために、このことを記号で $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ と書くことにする。また、すべての $i$ について $b_i \le a_i$ のとき、単に $\mathbf{b} \le \mathbf{a}$ と書くことにする。このような $b$ をそれぞれ、$a$ より小さい次数、または $\mathbf{a}$ 以下の次数と呼ぶことにする。帰納法の仮定として、$F$ の $\mathbf{a}$ 次より小さい次数の $\mathbf{b}$ に対する $\mu \in \mathcal{N}_0(\mathbf{b})$ に対応するテーラー展開係数 $F_\mu$ はすでに、微分作用素の像の $z_{ii}$ に関する適当な高階微分で書けているとする。このとき $\mathbf{a}$ についても同じことが成り立つことを示そう。今 $\mathbb{D}_\nu F := P_\nu^M\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right) F$ を $z_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ に制限すると、微分した後まで、$z_{ij}$ $(i \neq j)$ なる項が残っているところは全部消えるので、$\mu \in \mathcal{N}_0(\mathbf{b})$ で $\mathbf{b} \le \mathbf{a}$ となるような $\mu$ に対する $F_\mu$ 以外のテーラー展開項は全部消える。$P_\nu^M(T)$ の単項式 $T^\mu$ の作用 $\left(\frac{p}{\partial Z}\right)^\mu$ のうち、$\mu = \nu$ の時は $F_\nu(z_{11}, z_{22}, \ldots, z_{nn})$ の定数倍のみ残る。$\mu \neq \nu$ であれば、Monomial basis の定義により、$\mu_{ii} \neq 0$ となる $i$ が (少なくとも一つは) ある。これはつまり $\sum_{j=1,j\neq i}^n \mu_{ji} < a_i$ と言うことを意味し、微分して制限して残るのは、$\mathbf{a}$ 次よりも小さな次数の項 $F_\mu$ を $z_{ii}$ のうちのいくつかで何度か微分したものの整数倍である。帰納法の仮定により、$F_\mu$ は $F$ の微分作用素に対する像の微分の線形結合で書けている。よって、$F_\nu$ も、$\mathbb{D}_\nu F$ とその他の微分作用素の像を適当に何度か $z_{ii}$ で微分したものの線形結合でかけることになる。つまりは、$F_\nu$ は、微分と制限の像から復活できることになる。以上の証明は、monomial basis という具体的な微分作用素の構成によっている。(もし monomial basis の存在がわかっていかなったら、われわれに言えることは微分すると、「既知の低い次数の部分および次数が $\mathbf{a}$ の $\mu$ に対応する $F_\mu$」 の線形結合が微分作用素の像になっているというところまでで有り、$\mathbf{a}$ を決めても $\mu \in \mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ となる $\mu$ はいろいろあるから、これらの線形結合から、ひとつの $F_\nu$ をピックアップできるかどうかわからないのである。

結論を短く標語的に言うと、ジーゲル保型形式の非対角成分に関するテーラー展開係数の高階微分の線形結合から、いろいろなウェイトの 1 変数の保型形式のテンソルが得られ、逆にこれらからテーラー展開係数が復活できる。また、各多重次数 $\mathbf{a}$ に対する微分作用素の次元は、$\#(\mathcal{N}_0(\mathbf{a}))$ で与えられる。

## 3. 一般化

3.1. **設定.** さて、以上は対角成分への制限であったが、たとえば、$n=2$ ならば、これがすでにヤコービ形式のテーラー展開係数に応用できるのは明らかである ([1])。しかし一般の場合はもう少し考察が必要になる。より一般に $D = H_n$, $\Delta = H_{n_1} \times \cdots \times H_{n_r}$ $(n = n_1 + \cdots + n_r)$ ($\Delta$ は $D$ に対角ブロックとして埋め込む) の場合を考える。群は、次の自然な埋め込み

$$Sp(n_1,\mathbb{R}) \times Sp(n_2,\mathbb{R}) \times \cdots \times Sp(n_r,\mathbb{R}) \to Sp(n,\mathbb{R})$$

を考えている。$Z \in H_n$ に対して、$Z$ を $n_i \times n_j$ 次にブロック分けして $Z = (Z_{ij})$ と書くことにする。今後もテーラー展開という観点から述べるならば、非対角ブロック $Z_{ij}$ $(i \neq j)$ に関するテーラー展開を考えることになる。このような設定では、前に述べた微分作用素は、やはりテーラー展開係数の微分の線形結合で適当な保型性を満たすものと求めるという意味になる。微分作用素を決める多項式はどのように特徴付けられるかという一般的な枠組みは [4] で与えてあるのだが、ここで述べるのは、これよりはもう少し進化した内容である。

$GL(n_i,\mathbb{C})$ の既約表現 $\rho_i$ を与えておき、行き先の保型因子を、$g_i \in Sp(n_i,\mathbb{R})$ $(1 \le i \le r)$ に対して

$$J_\Delta((g_1,\ldots,g_r),(Z_{11},\ldots,Z_{rr})) = \otimes_{i=1}^r \det(C_iZ_{ii}+D_i)^k \rho_i(C_iZ_{ii}+D_i)$$

と定義する。$\otimes_i \rho_i$ の表現空間を $V$ とする。このとき、条件を満たす $V$ 値の微分作用素 $\mathbb{D}$ を与える $V$ 値の多項式 $P(T)$ の特徴付けは次のように与えられる。(ただし $2k \ge n$ とする。)
(1) $T$ を分割に応じてブロック分けして $T = (T_{ij})$ と書く。すると任意の $A_i \in GL_{n_i}(\mathbb{C})$ に対して、

$$P\left((A_iT_{ij}^t A_j)_{1 \le i,j \le r}\right) = \rho_i(A_1) \otimes \cdots \otimes \rho_i(A_r)P(T)$$

となる。
(2) $n \times 2k$ 次の変数係数の行列 $X$ を

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}$$

とブロック分けして書く。このとき、

$$\widetilde{P}(X) = P(X^t X) = P((X_i{}^t X_j))$$

とおけば、$\widetilde{P}$ は各 $X_i$ に関して、多重調和である。ここで、多重調和というのは、$X_i = (x_{pq}^{(i)})$ に対して、

$$\Delta_{p_1p_2}(X_i) = \sum_{q=1}^{2k} \frac{\partial^2}{\partial x_{p_1q}^{(i)} \partial x_{p_2q}^{(i)}}$$

と置くとき、

$$\Delta_{p_1p_2}(X_i)P = 0 \qquad (1 \leq p_1, p_2 \leq n_i)$$

となることである。一見この特徴付けだけをみると、前節の作用素は、この節の作用素の極めて特殊な例であり、似てはいるが、かなり異なる別の理論のように見える。(実際、私も長い間そう誤解していた。) ところが実は前節の作用素とこの節の作用素は非常に密接な関係がある、というかこの節の作用素は前節の作用素に含まれているとも言える。これを説明するためには [7] の結果をもう少し詳しく見て、前節の結果に関する補足説明をしなければならない。

**3.2. 対角への制限の場合への帰着.** 我々は $H_n$ を対角成分に制限する場合の微分作用素を与える多項式について、monomial basis というのを説明した。しかし、実はもう一つ別な、非常に重要な基底を構成できる。これを [7] から少し復習する。

さて、$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(2k)$ の基底としては、前の monomial basis 以外にもう一つ重要な基底が存在する。それを説明するために、記号を導入する。今 $X = (x_{iq})$ を $n \times 2k$ 次の変数行列とする。ここで、

$$L_{ij} = \sum_{q=1}^{2k} \frac{\partial^2}{\partial x_{iq} \partial x_{jq}}$$

とおく。これは前の記号にならえば、$\Delta_{ij}(X)$ と書いても良いが、混乱の元であるから別の記号を用いた。また、記号を面倒にしないためにも $\widetilde{P}(X) = P(X\,{}^t X)$ と見なしたとき、$L_{ij}$ で引き起こされる $P$ への作用も $L_{ij}$ と書くことにする。(実際は [7] では $k$ を任意の複素パラメータとして、上の混合ラプラシアンを $T$ の言葉でかいたものと $L_{ij}$ と定義している。) また、$\mathbf{e}_{ij}$ で $n$ 次の正方行列で、$(i,j)$ 成分および $(j,i)$ 成分は 1、それ以外は 0 となるものを表す。このとき、各 $\nu \in \mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ に対して一意的に決まる決まる次のような基底 $P_\nu^D(T)$ が存在する。

(1) $P_0^D(T)=1$ である。
(2) 任意の $i, j$ $(1\le i<j\le n)$ に対して、

$$L_{ij}P_\nu^D = P_{\nu-\mathbf{e}_{ij}}^D(T)$$

である。ここで $\nu-\mathbf{e}_{ij}$ に負の項が現れるとき、つまり、$\nu_{ij}=0$ の時は、$P_{\nu-\mathbf{e}_{ij}}^D(T)=0$ と定義する。
このような基底の存在の直接証明は非常に面倒である。(証明は [7]). これを descending basis と呼ぶ。さて、領域の制限をブロック分けにとったときには、多項式は各ブロック $X_i$ に関して多重調和であるべきだった。この場合、多項式はベクトル値であるが、実際は「スカラー値で多重調和なもの全体のなすベクトル空間」には $GL_{n_i}(\mathbb{C})$ が自然に作用しているので、この作用を既約表現すれば、$GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の表現が得られる。(どのように既約分解されるかは、たとえば [9] にある。) さて、そもそも対角への制限の場合は、多項式 $\widetilde{P}(X)$ は $X$ の各行に関して調和多項式であった。実際は $P(X^tX)$ という形でこの性質を満たすもの全体を斉次部分に分解して考えれば、$\oplus_{\mathbf{a}}\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(2k)$ 全体と一致していることがわかる。しかし、ブロックへの制限の場合も、$\widetilde{P}(X)$ が多重調和ということは、もちろん各行について、調和多項式と言うこと条件も含んでいる。 よって、これらのベクトルの成分全体は $\oplus_{\mathbf{a}}\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(2k)$ に含まれているのである。さらには、ブロック分けしたときに各ブロックに関して多重調和という条件は、$L_{ij}$ の条件でいえば、次のような条件にほかならない。

$$L_{ij}P=0 \qquad (n_1+\cdots+n_{l-1}+1\le i\le j\le n_1+\cdots+n_l,\ 1\le l\le r).$$

ここで、各ブロックに関して多重調和な多項式という条件を

$$P(T)=\sum_{\nu\in\mathcal{N}_0} c_\nu P_\nu^D(T)$$

と descending basis の線形結合で書いたものに適用してみる。

$$L_{ij}P=\sum_{\nu} c_\nu P_{\nu-e_{ij}}^D(T)=0$$

とすると、まず $\nu_{ij}=0$ ならば $P_{\nu-e_{ij}}=0$ であり、それ以外は、基底の一部の線形結合だから、係数は全部ゼロなのである。この定理を簡明に書くために次の記号を導入する。

$$\mathcal{N}_0(*;n_1,\ldots,n_r)=$$
$$\left\{\nu=(\nu_{ij})\in\mathcal{N}_0;\quad \begin{array}{l}\nu_{ij}=0 \text{ for all } i,\, j \text{ with}\\ 1+\sum_{p=1}^{l-1}n_p\le i<j\le\sum_{p=1}^{l}n_p \text{ for all } 1\le l\le r\end{array}\right\}.$$

もっとわかりやすく書けば、$\mathcal{N}_0(*;n_1,\ldots,n_r)$ は

$$\nu=\begin{pmatrix}0_{n_1} & * & \cdots & *\\ * & 0_{n_2} & * & *\\ * & * & \ddots & \vdots\\ * & \cdots & \cdots & 0_{n_r}\end{pmatrix}$$

という形の index $\nu$ の集合である。多重次数を指定して $\mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ の中で考えたいときには、ここで $*$ の部分を $\mathbf{a}$ と書くことにする。このとき、次を得る。

**Theorem 3.1.** 対角ブロックへの制限で良い振る舞いをする微分作用素を与えるベクトル値の多項式 $P(T)$ の成分全体は、次のベクトル空間

$$\mathcal{P}(2k : n_1, \ldots, n_r) := < P_\nu^D(T); \nu \in \mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r) >$$

の元と一致する。ここで右辺の $< * >$ は線形結合の全体を表す。

以上は多重調和性だけに着目しており、とりあえずはウェイトについては述べていない。これがわかった時点で、次の 2 つの問題が残る。

(1) 対角ブロック以外の変数 $Z_{ij}$ $(i \neq j)$ 全部に関するテーラー展開係数という立場で考えると、展開係数は、微分作用素の像から復活できるのか？

(2) ウェイトについて。

(i) 行き先のウェイトは、そもそもどういうウェイトがどれくらい現れるのか、または現れないのか。

(ii) 行き先のウェイトを具体的に $\prod_{i=1}^r GL_{n_i}(\mathbb{C})$ 既約表現に指定するとき、その（ベクトル値）多項式は具体的にはどうかけるのか。

このうち、(1) については、答はイエスである。(2) については、完全に明示的な回答とまでは言えないが、話は非常に具体的な空間の既約表現分解に帰着する。これらについて、次節以下に見る。

## 4. テーラー展開係数

前と同様、$Z = (Z_{ij}) \in H_n$ ($Z_{ij}$ は $n_i \times n_j$ 次の行列)、とブロック分けする。ここで、$F \in Hol(H_n, \mathbb{C})$ の $Z_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ の近傍でのテーラー展開は

$$F(Z) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r)} F_\nu(Z_{11}, \ldots, Z_{rr}) Z^\nu$$

と書ける。ここで $Z^\nu$ は、$\nu$ の条件より、もちろん対角ブロックに含まれるような変数 $z_{ij}$ は現れない。つまりは、微分から $F$ が復活できるための問題点は、おおざっぱに言って、$T^\nu$ $(\nu \in \mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r)$ なる単項式が $\mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r)$ の元で分離できるか、という問題である。もっと詳しく言うと、任意の $\nu \in \mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r)$ に対して、次のような多項式

$$P(T) = T^\nu + Q(T)$$

（ここで、$Q(T)$ は $T = (T_{ij})$ を $n$ の分割 $n = \sum_{l=1}^r n_l$ に応じたブロック分けとするとき、 $T_{11} = T_{22} = \cdots = T_{rr} = 0$ と制限すればゼロになるような多項式）が $\mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r)$ に含まれるかという問題になる。注意として、このような多項式は、普通は前に述べた monomial basis にはなっていない。$T$ の対角ブロックに含まれている非対角成分を含む単項式が現れないという保証はないからである。（実際、現れる方が普通である。）上記の問題の解答はイエスなのだが、それを証明するに

は、monomial basis と descending basis の双対性を用いる。今、次の事実が成り立っている ([7]).

**Lemma 4.1.** $\mathcal{P}(2k) = \oplus_{\mathbf{a}} \mathcal{P}_{\mathbf{a}}(2k)$ 上の適当な内積と $\nu$, $\mu \in \mathcal{N}_0$ に対して、

$$(P_\nu^M(T), P_\mu^D(T)) = \delta_{\nu\mu}$$

となる。ここで、内積は少なくとも $2k \geq n$ において、正定値な（よってもちろん非退化な）内積にとれている。

ここで、$\mathcal{P}(2k)$ の部分空間を、2つの空間に分解しておく。

$$W_1 =< P_\nu^M(T);\ \nu \in \mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r) >$$
$$W_2 =< P_\nu^M(T);\ \nu \in \mathcal{N}_0, \nu \notin \mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r) > .$$

記号で書くと少しわかりにくいけれど、$W_2$ は非対角ブロック以外の変数、つまり対角ブロックの変数のどれかを含むような、非対角成分からなる単項式にたいする monomial basis の線形結合である。（ここでの単項式は対角ブロックの変数だけからなっているとは限らない。）特に $Q(T) \in W_2$ ならば、$T_{ii} = 0 (i = 0, \ldots, r)$ とすると $Q(T)$ はゼロになる。あきらかに

$$\mathcal{P}(2k) = W_1 \oplus W_2 \qquad \text{（直和）}$$

である。ただし直交は全くしていない。さて、我々が知りたいのは、$\mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r)$ の元をこの直和で分解して表示したとき、$W_1$ の元がすべて現れるかと言うことである。つまり

$$pr : \mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r) \to W_1$$

という射影 $pr$ が全射かということである。今 $P \in \mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r)$ とする。すると前に述べた双対性より

$$(P, w) = 0 \qquad w \in W_2$$

である。射影 $pr$ の核は、もちろん $W_2 \cap \mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r)$ であるが、しかし、$P \in W_2 \cap \mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r)$ ならば、$(P, P) = 0$ となり、$(*, *)$ は正定値であるから、$P = 0$ となる。つまり $pr$ の核は $0$ であるから $pr$ は単射である。しかし定義より

$$\dim \mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r) = \#(\mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r)) = \dim W_1$$

であるから、$pr$ は同型である。つまり $pr$ は全射である。よって示された。

## 5. 母関数と $GL$ の作用

さて、$\prod_{i=1}^r GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の作用は何かを調べるには、もっと深い理論が必要である。このため [7] から standard basis (descending basis の適当な定数倍で定義される）の母関数の理論を思い出す。$X$ を $n$ 次

の変数行列で、対角成分はみなゼロとする。$X$ と $T$ の成分の多項式 $\sigma_i = \sigma_i(XT)$ $(1 \le i \le n)$ を

$$\det(\lambda 1_n - XT) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sigma_i(XT)\lambda^{n-i}$$

で定義する（$\lambda$ は不定元)。$\nu \in \mathcal{N}_0$ に対して $X^\nu$ を前に定めた単項式とする。次に、$\nu \in \mathbb{C}$ に対して決まる 1 変数の無限級数 $\mathbb{J}_\nu$ を

$$\mathbb{J}_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!(\nu+1)_l} = 1 + \frac{x}{\nu+1} + \frac{x^2}{2(\nu+1)(\nu+2)} + \cdots$$

で定義する。ここで $(x)_l = x(x+1)\cdots(x+l-1)$ (Pochhammer symbol) としている。また任意の $l$ $(1 \le l^leqn)$ に対して、

$$\mathcal{M}_l = \sum_{\substack{0<a,b<l \\ a+b\le l}x} \sigma_{a+b-l} \frac{\partial^2}{\partial\sigma_a \partial\sigma_b}$$

とおく。ただし、$\sigma_0 = 1, l > n$ については $\sigma_l = 0\ l > n$ とおく。また

$$G^{(1)}(\sigma_1) = (1 - \sigma_1/2)^{2-2k}$$

とおき、

$$G^n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mathbb{J}_{\frac{2k-n-1}{2}}(\sigma_n \mathcal{M}_n)\mathbb{J}_{\frac{2k-n}{2}}x(\sigma_{n-1}\mathcal{M}_{n-1})\cdots \mathbb{J}_{\frac{d-3}{2}}(\sigma_2\mathcal{M}_2)(G^{(1)}(\sigma_1))$$

で $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ の無限級数 $G^{(n)}$ を定義する。ここで、

$$G^{(n)}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_0} P_\nu(T) X^\nu$$

とおくと、$P_\nu(T)$ は $P_\nu^D(T)$ のゼロでない定数倍である ([7])。

ここで、$A \in GL_n(\mathbb{C})$ とすると、

$$\det(\lambda 1_n - XAT\,{}^tA) = \det(\lambda 1_n - {}^tAXAT)$$

であるから、$P_\nu(T) \to P_\nu(AY\,{}^tA)$ という作用は、$X$ の方に移して考えることができると言うことである。言い換えると

$$\sum_\nu P_\nu(AT\,{}^tA)X^\nu = \sum_\nu P_\nu(T)({}^tAXA)^\nu$$

である。今 $\mathcal{P}(2k; n_1, \ldots, n_r)$ の元だけ考えたかったら、$\nu \in \mathcal{N}_0(2k; n_1, \ldots, n_r)$ つまり $X^\nu$ に対角ブロックの成分がないものを考えると言うことになるので、$X = (X_{ij})$ とブロック分けしておいて、$X_{ii} = 0$ $(1 \le i \le r)$ とおいて同じ母関数を考えれば良いのである。ここで

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

とすれば、${}^tAXA = ({}^tA_i X_{ij} A_j)$ となるわけで、これが、$P(2k; n_1, \ldots, n_r)$ に対する $\prod_{i=1}^r GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の作用を与える。

つまり、$\nu \in \mathcal{N}_0(*; n_1, \ldots, n_r)$ に対して $|\nu| = \sum_{1\le i<j\le n} \nu_{ij}$ とおき、たとえば非負整数 $p$ を一つ固定して、$T$, $X$ の成分の多項式を

$$P_p(T, X) = \sum_{|\nu|=p} P_\nu(T) X^\nu$$

で定義すると、これは $X^\nu$ をダミー変数を思って、これらで張られるベクトル空間 $V$ を考えれば、ベクトル値の関数であって、その表現は $P_p(AT\,{}^tA, X) = P_p(T, {}^tAXA)$ より、$X^\nu \to ({}^tAXA)^\nu$ なる $V$ の表現 $\rho$ を行き先の保型因子とする微分作用素と対応するわけである。もちろん $(\rho, V)$ は既約ではない。これを既約分解して、具体的に多項式を分離するのは（つまり、単に既約分解を抽象的に与えるのではなくて、その空間の分解を具体的に記述するのは）わりと複雑な組合せ論の問題になって、一般に簡単そうには見えない。$n = (n-1) + 1$ なる分解の場合はわりと簡単である。どの $n_i$ も 1 でない一番簡単な場合は、$n = 4$, $r = 2$, $n_1 = n_2 = 2$ であり、この場合は、かなり努力すると完全に具体的な結果を書き下せる。しかし、一般的にはよくわからないので、これが、実用上不十分とも言えるだろう。なお、注意点として、$P_\nu(T)$ で決まる微分作用素の像の制限には、もちろん $F_\nu$ の定数倍は現れるが、微分しない係数がこれだけしか現れないという訳ではない。これは $P_\nu(T)$ は monomial basis ではなく、その線形結合に過ぎないのだから当然である。しつこく言うと、テーラー係数が復活できるというのは、すべての微分作用素の $X^\nu$ の係数を与えれば、そこからテーラー係数が復活できると言っているのである。

## 6. 行列 INDEX の JACOBI 形式

以上の話を Jacobi 形式に応用してみよう。$M$ を $l$ 次の正定値半整数対称行列とする。$H_{n+l}$ の変数をブロック分けして $Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ {}^tz & \omega \end{pmatrix}$ と書く。($\tau \in H_n$, $\omega \in H_l$, $z \in M_{nl}(\mathbb{C})$).

$$\Gamma^{(n,l)} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1_l & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1_l & {}^t\mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1_n & -{}^t\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1_l \end{pmatrix} \in Sp(n+l, \mathbb{Z}) \right\}$$

とヤコービ群を定義する。（もっと一般の離散群でもかまわないが、とりあえず。）$H_n \times M_{nl}(\mathbb{C})$ 上の正則関数 $F(\tau, z)$ は $F(\tau, z)e(Tr(M\omega))$ が $\Gamma^{(n,l)}$ に対して普通のジーゲル保型形式と同じ保型性を持つとき、index $M$ のヤコービ形式という。（正確に言えば、$n = 1$ の時は、カスプでのフーリエ展開の条件もいる。）この空間を $J_{k,S}(\Gamma^{(n,l)})$ と書くことにする。さて、$F(\tau, z)$ を $z = 0$ について展開する。

$$F(\tau, z) = \sum_{\alpha \in M_{nl}(\mathbb{Z}_{\ge 0})} F_\alpha(\tau) z^\alpha$$

ここで $z^\alpha$ は多重指数 $\alpha$ で決まる単項式 $\prod_{i,j} z_{ij}^{\alpha_{ij}}$ である。ここでヤング図形と整数の有限列 $Y = (f_1, f_2, \ldots,)$ $(f_1 \ge f_2 \ge \cdots)$ を同一視する。

$f_m \neq 0,\ f_{m+1} = 0$ となる $m$ をヤング図形 $Y$ の深さと呼び $depth(Y)$ と書くことにする。一般に $GL_m(\mathbb{C})$ の既約表現と深さが $m$ 以下のヤング図形 $Y$ は1対1に対応する。この表現を $\rho_{Y,m}$ と書くことにする。表現の次元などは $m$ にもより、$Y$ だけでは決まらない。さて、前節で与えた $X$ のブロック分解は、いまは

$$X = \begin{pmatrix} 0_n & X_{12} \\ {}^tX_{12} & 0_l \end{pmatrix}$$

となっている。$X_{12} \in M_{nl}(\mathbb{C})$ の成分を変数とする多項式 $P(X_{12})$ 全体の空間に $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C}) \times GL_l(\mathbb{C})$ を $P(X_{12}) \to P({}^tAX_{12}B)$ として作用させると、よく知られた古典群の表現論より、この空間の既約表現分解は $\rho_{Y,n} \otimes \rho_{Y,l}$ の和（重複度1）になる。これから、$H_{n+l}$ 上の正則関数のテーラー展開係数から、$depth(Y) \leq min(n.l)$ となるヤング図形すべてに対して、ウェイトが $\rho_{Y,n} \otimes \rho_{Y,l}$ に従って振る舞う $H_n \times H_l$ 上の正則関数が構成できることがわかる。これを、ヤコービ形式で考えると $e(Tr(S\omega))$ の部分は、微分が定数倍になる。つまり微分作用素を与えるベクトル値の多項式を $P(T)$ とすると、

$$P\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq l} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{ji}}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq l} & M \end{pmatrix}$$

として $F(\tau, z)$ に作用する。 ヤコービ形式では保型性は $GL_n(\mathbb{C})$ についてだけ言えているので、表現としては $\rho_{Y,n}$ が重複度 $\dim \rho_{Y,l}$ で現れるわけである。（たとえば $l = 1$ ならば、$GL(n)$ のすべての対称テンソル表現が重複度 1 であらわれる。）まとめると

**Theorem 6.1.** ウェイト $k$ *index* $M$ の $\Gamma^{(n,l)}$ に関するヤコービ形式から、任意のヤング図形 $Y$ で $depth(Y) \leq min(n, l)$ に対応する $\det^k \rho_{Y,n}$ をウェイトに持つジーゲル保型形式への $\dim \rho_{Y,l}$ 個の写像が、微分作用素と領域の制限により構成される。かつこれらの像からヤコービ形式自身が復活できる。

## 7. ヤコービ形式加群の構造例

以上を用いると、ヤコービ形式から様々なウェイトのジーゲル保型形式の直和への単射ができる。よって、逆にジーゲル保型形式を与えて、これからヤコービ形式が再構成できないかという問題が考えられる。しかし、すべてのウェイトのジーゲル保型形式をとるのでは、現実的な構成はできない。この問題を解くためには、どの次数までのテーラー展開係数がヤコービ形式を決めるかをかなり正確に述べられなければならない。またその次数までから得られるジーゲル保型形式全体は何かを述べなくてはならない。

正確にわかっている場合はあまり多くはない。以下、index はスカラー $m$ の場合、つまり $l = 1$ のだけを考える。この場合は $z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$

とかけて、展開は

$$F(\tau, z) = \sum_{\nu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} F_\nu(\tau) z^\nu$$

となる。微分作用素での写像の行き先のウェイトは $\det^k Sym(\nu)$ である。$|\nu| = \sum_{i=1}^n \nu_i$ とする。$m(F) = \min\{|\nu|; F_\nu \neq 0\}$ としよう。

問題：$m_1 < m(F)$ ならば $F = 0$ となるような最小の $m_1$ を $m_0$ と書く。$m_0$ は何か？つまり、最初の $m_0$ 次まで消えていたら $F = 0$ となるような最小の $m_0$ は何か？

最小性にこだわらないのならば、$m_0$ を十分大きくとれば、この性質は成り立つ。

私が知る限り $m_0$ が正確に知られているのは次の場合だけである。
(1) $n = 1$ ならば、$m_0 \leq 2m$. ($m$ は index). これは Eichler-Zagier による。
(2) $n = 2$, $m = 1$ ならば $m_0 = 2$.
(3) $n = 2$, $m = 2$ ならば $m_0 = 6$.
(4) $n = 3$, $m = 1$ ならば $m_0 = 4$.

$n = 2$ の場合の結果を例示する。$l = 1$ のとき、少し群の記号を変える。$Sp(n, \mathbb{R})$ の離散部分群を $\Gamma$ として、$\Gamma^{(n,1)}$ とかく変わりに、埋め込み $\Gamma \subset Sp(n+1, \mathbb{R})$ と Heisenberg part $\mathbb{Z}^{2n} \cdot \mathbb{Z}$ の直積で決まる $Sp(n+1, \mathbb{R})$ の部分群を $\Gamma^J$ と書くことにする。このときすべてのウェイトに対するヤコービ形式の空間の直和 $J_{*,m}(\Gamma^J) = \oplus_{k=1}^\infty J_{k,m}(\Gamma^J)$, $J_{even,m}(\Gamma^J) = \oplus_{k=2,even}^\infty J_{k,m}(\Gamma^J)$, は, 偶数ウェイトの $\Gamma$ に関するジーゲル保型形式環 $A_{even}(\Gamma) := \oplus_{k:even} A_k(\Gamma)$ 上の加群になっている。

**Theorem 7.1.** *(1)* $J_{*,1}(Sp(2, \mathbb{Z})^J)$ は $A_{even}(Sp(2, \mathbb{Z}))$ 上の階数 8 の自由加群で、生成元のウェイトは、4, 6, 10, 12, 21, 27, 29, 35.
*(2)* $J_{even,2}(Sp(2, \mathbb{Z})^J)$ は $A_{even}(Sp(2, \mathbb{Z}))$ 上の階数 10 の自由加群で、生成元のウェイトは 4, 6, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 14, 16.
*(3)* $J_{*,1}(\Gamma_0^{(2)}(2)^J)$ は $A_{even}(\Gamma_0^{(2)}(2))$ 上の階数 8 の自由加群で生成元のウェイトは 2 4, 4, 6, 13, 15, 17, 19.

ちなみに、スカラー値でなくて、ベクトル値の場合の構造定理もあるが、これはここでは省略する。([6] を参照)

## 8. 半整数ウェイトとヤコービ形式の対応

これは今までの話とあまり関係がないのだが、ヤコービ形式の新結果と言うことで、まとめて話してしまった。あまり紙数もないので、簡単に結果だけ触れる。任意の自然数 $N$ に対して、$Sp(n, \mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0^{(n)}(N)$ を

$$\Gamma_0^{(n)}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}); C \equiv 0 \bmod N \right\}$$

と定義する。$\chi$ を conductor が $N$ の約数の Dirichlet character とし、$g \in \Gamma_0^{(n)}(N)$ に対して、$\chi(g) = \chi(\det(D))$ とおくと、これは $\Gamma_0^{(n)}(N)$ の

指標になる。$(\rho_0, V_0)$ を $GL_n(\mathbb{C})$ の有限次既約表現で det のべきを含まないものとする。$\Gamma_0^{(n)}(N)^J := \Gamma_0^{(n)}(N)^{(n,1)}$ に関する index 1 の weight $\det^k \rho_0$ の $n$ 次正則ヤコービ形式の空間 $J_{det^k\rho_0,1}(\Gamma_0^{(n)}(N)^J, \chi)$ というのは $H_n \times \mathbb{C}^n$ 上の正則関数 $f$ で $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0^{(n)}(N)$ の作用については、

$$f(\gamma\tau, z(C\tau + D)^{-1}) = \chi(\gamma)\det(C\tau + D)^k \rho_0(C\tau + D) f(\tau, z)$$

が成り立ち、Heisenberg part については普通通りの保型性が成り立つようなものである。また歪正則ヤコービというのは、上で保型因子の部分を $\overline{\det(C\tau + D)}^{k-1} |\det(C\tau + D)| \overline{\rho_0(C\tau + D)}$ に変えた保型性を満たし、さらに自然なフーリエ展開条件を満たすある空間である ([2])。この空間は、$J_{*,1}^{skew}$ と書いて、正則なものと区別する。

一方で、$V_0$ 値の半整数ウェイトのジーゲル保型形式は次のように定義される。$\vartheta(\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e(p\tau {}^t p)$ (ただし $e(x) := exp(2\pi i x)$ と書く。) $\chi$ を modulo $4N$ の Dirichlet 級数とする。正則関数 $h : H_n \to V_0$ が任意の $\gamma \in \Gamma_0^{(n)}(4N)$ に対して、

$$h(\gamma\tau) = \chi(\gamma)(\vartheta(\gamma\tau)/\theta(\tau))^{2k-1} \rho_0(C\tau + D) h(\tau)$$

が成立。以上でヤコービ形式も半整数ウェイトも $n = 1$ ならばカスプでの正則条件が必要だが、省略した。以上の空間を $A_{det^{k-1/2}\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$ と書く。また、ヤコービ形式、半整数ウェイトともに自然にカスプ形式が定義され、 これらの空間は、上に cusp という字を補って表す。

さて、上に定義したレベル $4N$ の半整数ウェイト保型形式からレベル $N$ の部分を取り出す必要があるので、plus subspace というものを定義する。今 $\psi$ を $\left(\frac{-4}{*}\right)$ で定義される Dirichlet 指標とし、$\chi$ を modulo $N$ の Dirichlet 指標とする。$l = 0$ または 1 として $\chi\psi^l$ を考える。これに対して、$A_{\det^{k-1/2}\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(4N), \chi\psi^l)$ を考える。ここで、$l$ は $\chi\psi^l$ からは決まらないかもしれないが (たとえば $N = 4$ ならば自明な指標は $1 \times 1$ とも $\psi \times \psi$ ともかけるから。) $l$ を指定しておき、その指定に対して、plus subspace というのを次のように定義する。$h \in A_{\det^{k-1/2}\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(4N), \chi\psi^l)$ のフーリエ展開を

$$h(\tau) = \sum_{T \in L_n^*} a(T) e(Tr(TZ)) \qquad L_n^* \text{ は半整数対称行列の集合}$$

と書くとき、「ある行ベクトル $\mu \in \mathbb{Z}^n$ に対して、$T - (-1)^{k+l+1}\, {}^t\mu\mu \in L_n^*$ とならない $T$ については $a(T) = 0$」という $h$ に対する条件を考える。このような $h$ の空間を plus subspace と呼び、$A^+_{\det^{k-1/2}\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(4N), \chi\psi^l)$ と書く。

再度強調しておくと、$\chi_1 \cdot 1 = \chi_2\psi$ ($\chi_i$ はともに modulo $N$ の Dirichlet 指標) と書けている場合は、同じ空間に対して 2 種類の異なる plus subspace が定義されている。

**Theorem 8.1.** 次の線形同型が成立する。この同型はレベルが $4N$ を割らないヘッケ作用素の作用とも可換である。

$$J_{(k,\rho_0),1}(\Gamma_0^{(n)}(N)^J,\chi) \cong A^+_{k-1/2,\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(4N),\psi^k\chi).$$

$$J^{cusp}_{(k,\rho_0),1}(\Gamma_0^{(n)}(N)^J,\chi) \cong S^+_{k-1/2,\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(4N),\psi^k\chi).$$

$$J^{skew}_{(k,\rho_0),1}(\Gamma_0^{(n)}(N)^J,\chi) \cong A^+_{k-1/2,\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(4N),\psi^{k-1}\chi).$$

$$J^{skew,cusp}_{(k,\rho_0),1}(\Gamma_0^{(n)}(N)^J,\chi) \cong S^+_{k-1/2,\rho_0}(\Gamma_0^{(n)}(4N),\psi^{k-1}\chi).$$

以上は $N=1$ ならば前から知られていた。$n=1$, $N=1$ ならば、Kohnen, Zagier, Skoruppa による。また $n$ 一般で $N=1$ は、[3],[2],[10] などによる。$n=1$ で $N$ が一般の場合は Kramer [11] による。実際、今回の証明は Kramer [11] の証明をまねたものである。

## References


[1] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics **55**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. v+148.

[2] S. Hayashida, Skew-holomorphic Jacobi forms of index 1 and Siegel modular forms of half integral weight. Journal of Number Theory, **106** (2004) 200-218.

[3] T. Ibukiyama, On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights. Comment. Math. Univ. St. Paul. **41**(1992), 109-124.

[4] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials. Commentarii Math. Univ. St. Pauli **48** (1999), 103-118.

[5] T. Ibukiyama, The Taylor expansion of Jacobi forms and applications to higher indices of degree two, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), 579-613.

[6] T. Ibukiyama, Structures and dimensions of vector valued Jacobi forms of degree two, to appear in Publication RIMS **51** no. 3.

[7] T. Ibukiyama and D. Zagier, Higher Spherical Polynomials, preprint, MPI preprint series **2014-41**, (2014), 97 pp.

[8] 伊吹山知義、Higher Spherical Polynomials (joint work with Don Zagier) , 京大数理解析研究所講究録 **No. 1934**, 保型形式と関連するゼータ関数の研究 (2015), 123–137.

[9] M. Kashiwara and M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. Invent. Math. **44** (1978), 1–47.

[10] S. Kimura, On vector valued Siegel modular forms of half integral weight and Jacobi forms, Master Thesis of Osaka University (2005).

[11] J. Kramer, Jacobiformen und Thetareihen, Manuscript. Math. **54** (1986), 279–322.



Professor Emeritus(Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University)

*E-mail address*: `ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp`